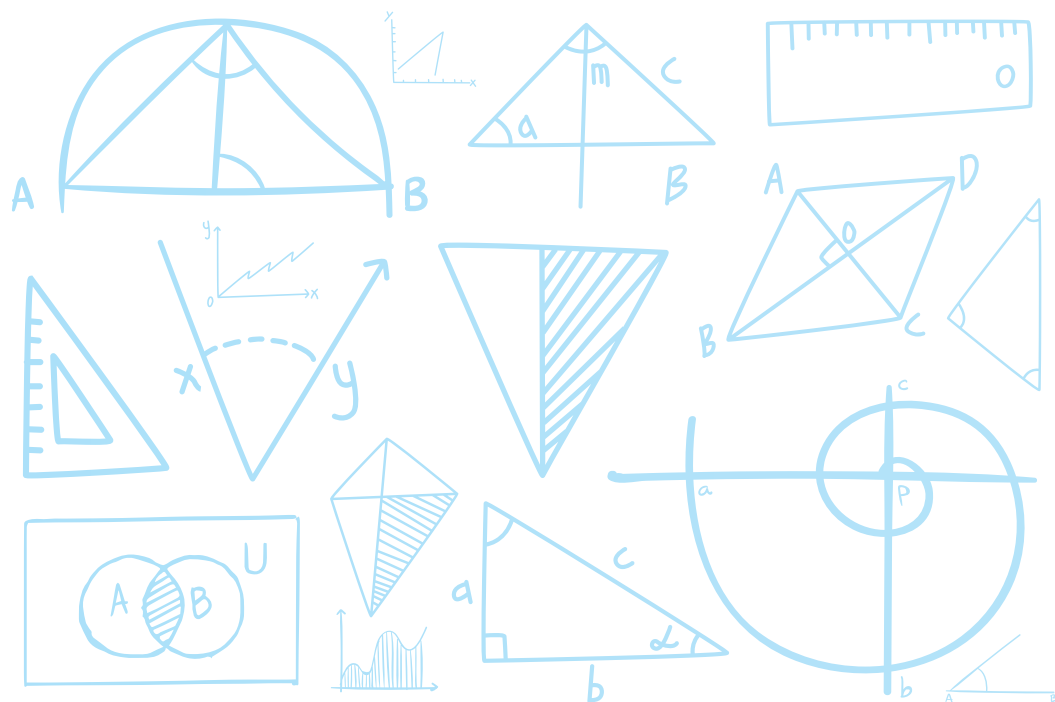


Sorin Peligrad



# GEOMETRIE PLANA

pentru gimnaziu și liceu

- ————— Construcții geometrice auxiliare ————— •
- ————— Proprietăți, teoreme, aplicații ————— •
- ————— Puncte, drepte și cercuri remarcabile ————— •

Editura Paralela 45

# CUPRINS

CUVÂNT-ÎNAINTE .....	5
----------------------	---

CAPITOLUL I CONSTRUCȚII GEOMETRICE AUXILIARE .....	7
--	---

## CAPITOLUL II

<b>PROPRIETĂȚI, TEOREME, APLICAȚII.....</b>	<b>58</b>
II.1. Proprietăți generale în triunghi .....	59
II.2. Ortocentru. Proprietăți. Aplicații .....	60
II.3. Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de $15^\circ$ , $75^\circ$ , $22^\circ 30'$ și $67^\circ 30'$ .....	62
II.4. Teorema lui Pitagora generalizată.....	68
II.5. Teorema cosinusului (forma trigonometrică a teoremei lui Pitagora generalizată). Aplicații .....	69
II.6. Teorema sinusului. Aplicații .....	72
II.7. Relația lui Stewart. Calculul lungimii mediane .....	74
II.8. Teorema lui Euler .....	76
II.9. Teorema bisectoarei. Calculul lungimii bisectoarei. Aplicații .....	77
II.10. Calculul lungimii înălțimii unui triunghi. Formula lui Heron .....	81
II.11. Teorema lui Menelaus. Reciproca pentru triunghi. Aplicații. Teorema lui Menelaus pentru patrulater.....	82
II.12. Relația lui Van Aubel. Aplicație .....	86
II.13. Tipuri speciale de rapoarte.....	88
II.14. Teorema lui Ceva. Reciproca pentru triunghi. Aplicații. Teorema lui Ceva pentru patrulater .....	90
II.15. Aplicații la teorema lui Menelaus și la teorema lui Ceva.....	96
II.16. Construcții geometrice efectuate numai cu rigla negradată (partea a II-a).....	97
II.17. Teorema lui Carnot. Aplicații .....	99
II.18. Teorema lui Steiner. Aplicații .....	101
II.19. Puterea punctului față de cerc. Aplicații .....	103

## CAPITOLUL III

<b>PUNCTE, DREPTE ȘI CERCURI REMARCABILE.....</b>	<b>106</b>
III.1. Cercul lui Euler. Dreapta lui Euler .....	107
III.2. Relația lui Euler. Inegalitatea lui Euler.....	109
III.3. Forma algebrică a inegalității lui Euler.....	110
III.4. Inegalitatea lui Ptolemeu. Teoremele lui Ptolemeu .....	111
III.5. Punctul izogon al unui triunghi. Punctul lui Torricelli .....	113
III.6. Punctul lui Miquel. Cercul lui Miquel. Punctul lui Miquel al unui triunghi. Punctul lui Miquel al unui patrulater .....	116
III.7. Dreapta lui Gauss.....	120
III.8. Dreapta lui Newton.....	121
III.9. Dreapta lui Simson .....	123
III.10. Punctul lui Gergonne .....	124

III.11. Cercurile exînscrie. Punctul lui Nagel. Punctele adjunete ale lui Gergonne. Razele cercurilor exînscrie.....	125
III.12. Punctul lui Lemoine. Punctul lui Lemoine al unui triunghi dreptunghic.....	128
III.13. Dreapta lui Lemoine .....	131
III.14. Punctul lui Mathot .....	132
III.15. O corespondență între puncte și drepte în plan.....	133
III.16. Teorema lui D. Pompeiu.....	135
III.17. Problema lui Gh. Țițeica.....	136

<b>BIBLIOGRAFIE.....</b>	<b>137</b>
--------------------------	------------

# CUVÂNT-ÎNAINTE

Prezenta lucrare este structurată în trei capitole.

Primul capitol reunește principalele tipuri de construcții geometrice auxiliare utilizate în rezolvarea problemelor, incluzând și construcții realizate exclusiv cu rigla negradată, probleme cu legături, tipuri deosebite de probleme, precum și exerciții propuse la diverse olimpiade de matematică. Tot aici sunt selectate câteva dintre cele mai reprezentative probleme, însoțite de soluții elementare.

În capitolul al doilea sunt prezentate teoreme și proprietăți esențiale, alături de aplicațiile lor practice. O parte dintre problemele din primul capitol sunt reluate, fiind rezolvate prin intermediul acestor teoreme. De asemenea, sunt incluse exemple suplimentare de construcții geometrice realizabile doar cu rigla negradată.

Capitolul al treilea este dedicat unor configurații geometrice deosebite: puncte conciclice, puncte coliniare și drepte concurente. Tot aici sunt analizate puncte, drepte și cercuri celebre din geometria triunghiului, utile în abordarea și rezolvarea problemelor.

Lucrarea poate fi utilizată și ca o mică culegere de probleme. Cititorul este încurajat să încerce mai întâi rezolvarea acestora pe cont propriu, iar apoi să compare soluțiile proprii cu cele prezentate în lucrare.

# CAPITOLUL I

## CONSTRUCȚII GEOMETRICE AUXILIARE

- A. Construcții geometrice auxiliare
- A.1. Construcția unor unghiuri ajutătoare – problemele: 1, 2, 4, 8, 43, 24, 52, 42
  - A.2. Construcția unor triunghiuri echilaterale – problemele: 1, 9, 12, 13, 14
  - A.3. Construcția unor perpendiculare – problemele: 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 16, 39, 40, 41, 48
  - A.4. Construcția unor triunghiuri isoscele – problemele: 9, 11, 13, 43
  - A.5. Prelungirea unor segmente – problemele: 13, 15, 16, 17, 32, 33, 34, 50
  - A.6. Folosirea mijloacelor unor segmente – problemele: 13, 18, 31, 33, 39, 49
  - A.7. Construcția unor paralele – problemele: 19, 20, 21, 23, 34, 51
  - A.8. Construcția cercului circumscris unui triunghi – problemele: 20, 38, 35, 46
  - A.9. Prelungirea medianei cu un segment congruent cu ea – problemele: 21, 23, 28
  - A.10. Construcția unor pătrate – problemele: 52, 17
- B. Construcții geometrice efectuate numai cu rigla negradată (partea I) – problemele: 22, 23
- C. Probleme cu legături – problemele: 9, 10 și 11; 20, 23 și 24; 21, 25 și 26
- D. Tipuri deosebite de probleme – problemele: 39, 40, 41, 51
- E. Probleme date la diverse olimpiade – problemele: 43, 44, 45, 47

1. Fie triunghiul  $ABC$  în care  $AB \equiv AC$  și  $\sphericalangle BAC = 20^\circ$ . Se consideră  $E \in AB$ ,  $D \in AC$ , astfel încât  $\sphericalangle ACE = 30^\circ$  și  $\sphericalangle ABD = 20^\circ$ . Aflați măsura unghiului  $BDE$ .

**Soluția 1:**

Construim  $\sphericalangle FBC$ ,  $F \in AC$ , astfel încât  $\sphericalangle FBC = 20^\circ$ .

$$\text{Din } AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \frac{180^\circ - \sphericalangle A}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ;$$

$$\sphericalangle BFC = 180^\circ - (20^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \sphericalangle BFC \equiv \sphericalangle BCF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BF \equiv BC. (1)$$

$$\sphericalangle BCE = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle BEC = 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ) = 50^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle BCE \Rightarrow BE \equiv BC. (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow BE \equiv BF. (3) \sphericalangle EBF = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ. (4)$$

$$\text{Din (3) și (4)} \Rightarrow \triangle EBF \text{ este echilateral} \Rightarrow EF \equiv BF. (5)$$

$$\sphericalangle DBF = 80^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 40^\circ; \sphericalangle BFD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$\sphericalangle BDF = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ = \sphericalangle DBF \Rightarrow \sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle DBF.$$

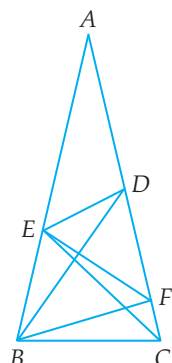
$$\text{Din } \sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle DBF \Rightarrow BF \equiv FD. (6)$$

$$\text{Din (5) și (6)} \Rightarrow FD \equiv EF. (7) \text{ Din } \triangle EBF \text{ echilateral} \Rightarrow \sphericalangle BFE = 60^\circ.$$

$$\text{Deci } \sphericalangle EFD = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ.$$

$$\text{Din (7)} \Rightarrow \sphericalangle FED \equiv \sphericalangle FDE \Rightarrow \sphericalangle FDE = \frac{180^\circ - \sphericalangle EFD}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

$$\text{Deci } \sphericalangle BDE = \sphericalangle FDE - \sphericalangle BDF = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$



**Soluția 2:**

Construim triunghiul echilateral  $ACF$ , cu  $AB$  în interiorul unghiului  $CAF$ .

Notăm  $CE \cap AF = \{I\}$ .

Ducem  $DL \perp AB$ ,  $L \in AB$  și notăm  $DC \cap CI = \{H\}$ .

Din  $\sphericalangle ACE = 30^\circ \Rightarrow CI$  este bisectoare în triunghiul echilateral  $ACF \Rightarrow CI$  este înălțime și mediană.

Deci  $CI \perp AF$  și  $IA \equiv IF$ .

$$\text{Din } IA \equiv IF \Rightarrow IA = \frac{AF}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}. (1)$$

Din  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 20^\circ \Rightarrow DA \equiv DB$ . Din  $DA \equiv DB$ ,  $DL \perp AB \Rightarrow AL \equiv LB$ ,  $\sphericalangle ADL \equiv \sphericalangle BDL$ .

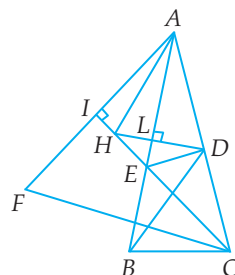
$$\text{Din } AL \equiv LB \Rightarrow AL = \frac{AB}{2}. (2) \text{ Din (1) și (2)} \Rightarrow AL \equiv IA. (3)$$

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ; \sphericalangle ADL \equiv \sphericalangle BDL = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Din  $CI \perp AF$  și  $DL \perp AB \Rightarrow \sphericalangle AIH = \sphericalangle ALH = 90^\circ$ .

Din  $\sphericalangle AIH = \sphericalangle ALH = 90^\circ$ ,  $AI \equiv AL$ ,  $AH \equiv AH \Rightarrow \triangle AIH \equiv \triangle ALH \Rightarrow \sphericalangle IAH = \sphericalangle LAH$ .

$$\sphericalangle IAL = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$



$$\text{Din } \sphericalangle IAH \equiv \sphericalangle LAH \Rightarrow \sphericalangle IAH \equiv \sphericalangle LAH = \frac{\sphericalangle IAL}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

$$\text{Deci } \sphericalangle LAH = \sphericalangle LAD = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle LAH \equiv \sphericalangle LAD.$$

În  $\triangle HAD$  avem  $\sphericalangle LAH \equiv \sphericalangle LAD$ ,  $AL \perp HD \Rightarrow AH \equiv AD$ .

$$\text{Din } AH \equiv AD, AL \perp HD \Rightarrow LH \equiv LD.$$

$$\text{Din } LH \equiv LD, EL \perp HD \Rightarrow EH \equiv ED.$$

$$\text{Din } EH \equiv ED \Rightarrow \sphericalangle EDH \equiv \sphericalangle EHD.$$

$$\text{În } \triangle EIA \text{ avem } \sphericalangle AIE = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle AEI = 90^\circ - 40^\circ \Rightarrow \sphericalangle AEI = 50^\circ.$$

$$\text{În } \triangle ELH \text{ avem } \sphericalangle ELH = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle EHL = 90^\circ - 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle EHL = 40^\circ \Rightarrow \sphericalangle EHD = 40^\circ \Rightarrow \sphericalangle EDH = 40^\circ.$$

$$\text{Dar } \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDL - \sphericalangle EDH = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

### Soluția 3:

Construim triunghiul echilateral  $ABF$ , cu  $AC$  în interiorul unghiului  $BAF$ .

Notăm  $FD \cap AB = \{I\}$ ; notăm intersecția dintre  $ED$  și bisectoarea unghiului  $DAF$  cu  $L$  și  $AL \cap FI = \{H\}$ .

$$\text{Din } \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 20^\circ \Rightarrow DA \equiv DB. (1)$$

$$\text{Din } \triangle ABF \text{ triunghi echilateral} \Rightarrow FA \equiv FB. (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow FD$  este mediatoarea lui  $AB \Rightarrow IA \equiv IB$  și  $FI \perp AB$ .

$$\text{Din } \triangle ABF \text{ triunghi echilateral, } FI \perp AB \Rightarrow \sphericalangle AFI \equiv \sphericalangle BFI \Rightarrow \sphericalangle AFI = \sphericalangle BFI = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle AFH = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle AFH}.$$

$$\text{Din } AH \text{ bisectoarea unghiului } DAF \Rightarrow \sphericalangle DAH \equiv \sphericalangle HAF; \sphericalangle DAF = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

$$\text{Deci } \sphericalangle DAH = \sphericalangle HAF = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle HAF}.$$

$$\text{Din } AB \equiv AC, AB \equiv AF \Rightarrow AC \equiv AF.$$

$$\text{Din } \sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle HAF, AC \equiv AF, \sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle AFN \Rightarrow \triangle EAC \equiv \triangle HAF}.$$

$$\text{Din } \triangle EAC \equiv \triangle HAF \Rightarrow AE \equiv AH.$$

$$\text{Din } \sphericalangle EAD = \sphericalangle HAD = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle DAH}.$$

$$\text{Din } \sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle HAD, AE \equiv AH, AD \equiv AD \Rightarrow \triangle EAD \equiv \triangle HAD}.$$

$$\text{Din } \triangle EAD \equiv \triangle HAD \Rightarrow \sphericalangle AED \equiv \sphericalangle AHD}. (3)$$

$$\text{Cum } \sphericalangle AHD \text{ este unghi exterior } \triangle AHF \Rightarrow \sphericalangle AHD = \sphericalangle HAF + \sphericalangle HFA = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ. (4)$$

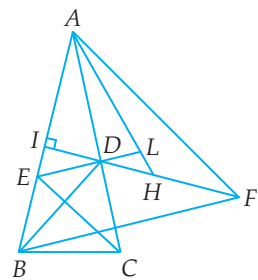
$$\text{Din } (3) \text{ și } (4) \Rightarrow \sphericalangle AED = 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle IED = 50^\circ. \text{ Din } DI \perp AB \Rightarrow \sphericalangle DIE = 90^\circ.$$

$$\text{Din } \sphericalangle DIE = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle EDI = 90^\circ - \sphericalangle IED = 90^\circ - 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle EDI = 40^\circ.$$

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ.$$

$$\text{Din } DA \equiv DB, DI \perp AB \Rightarrow \sphericalangle BDI \equiv \sphericalangle ADI \Rightarrow \sphericalangle BDI = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

$$\text{Deci } \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDI - \sphericalangle EDI = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$



## CAPITOLUL III

# PUNCTE, DREPTE ȘI CERCURI

### REMARCABILE

- III.1. Cercul lui Euler. Dreapta lui Euler
- III.2. Relația lui Euler. Inegalitatea lui Euler
- III.3. Forma algebrică a inegalității lui Euler
- III.4. Inegalitatea lui Ptolemeu. Teoremele lui Ptolemeu
- III.5. Punctul izogon al unui triunghi. Punctul lui Torriceli
- III.6. Punctul lui Miquel. Cercul lui Miquel
- III.7. Dreapta lui Gauss
- III.8. Dreapta lui Newton
- III.9. Dreapta lui Simson
- III.10. Punctul lui Gergonne
- III.11. Cercurile exînscrie. Punctul lui Nagel. Punctele adjuncte ale lui Gergonne.  
Razele cercurilor exînscrie
- III.12. Punctul lui Lemoine. Punctul lui Lemoine al unui triunghi dreptunghic
- III.13. Dreapta lui Lemoine
- III.14. Punctul lui Mathot
- III.15. O corespondență între puncte și drepte în plan
- III.16. Teorema lui D. Pompeiu
- III.17. Teorema lui Gh. Țițeica

### III.1. CERCUL LUI EULER. DREAPTA LUI EULER

#### Cercul lui Euler

Într-un triunghi oarecare picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului sunt 9 puncte conciclice. Cercul care conține aceste nouă puncte este cunoscut sub denumirea de **cercul lui Euler** sau **cercul celor 9 puncte**.

*Soluție:*

$$\text{Din } AH' - \text{diametru} \Rightarrow \sphericalangle ACA' = \frac{\widehat{ABA'}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Din  $\sphericalangle ACA' = 90^\circ \Rightarrow A'C \perp AC$ . Din  $A'C \perp AC$ ,  
 $BE \perp AC \Rightarrow A'C \parallel BE$ . Din  $A'C \parallel BE \Rightarrow A'C \parallel BH$ .

$$\text{Din } AA' \text{ diametru} \Rightarrow \sphericalangle ABA' = \frac{\widehat{ACA'}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Din  $\sphericalangle ABA' = 90^\circ \Rightarrow A'B \perp AB$ .

Din  $A'B \perp AB$ ,  $CF \perp AB \Rightarrow A'B \parallel CF \Rightarrow A'B \parallel CH$ .

Din  $A'C \parallel BH$ ,  $A'B \parallel CH \Rightarrow A'BHC$  este paralelogram  $\Rightarrow MB \equiv MC$  și  $MH \equiv MA'$ , unde  $HA' \cap BC = \{M\}$ .

Din  $MH \equiv MA'$ ,  $OA \equiv OA' \Rightarrow OM$  este linie mijlocie în  $\triangle AA'H \Rightarrow OM \parallel AH$  și  $OM = \frac{AH}{2}$ . Notăm mijlocul segmentului  $AH$  cu  $S \Rightarrow AS \equiv SH$ .

$$\text{Din } AS \equiv SH \Rightarrow SH = \frac{AH}{2} \Rightarrow SH = OM \Rightarrow SH \equiv OM.$$

Din  $OM \parallel AH \Rightarrow OM \parallel SH$ .

Din  $OM \parallel SH$ ,  $SH \equiv OM \Rightarrow SHMO$  este paralelogram.

Din  $SHMO$  paralelogram  $\Rightarrow QH \equiv QO$ ,  $QS \equiv QM$ , unde  $OH \cap SM = \{Q\}$ .

$$\text{În } \triangle SDM \text{ avem: } \sphericalangle SDM = 90^\circ, QS \equiv QM \Rightarrow QD = \frac{SM}{2}.$$

$$\text{Din } QS = QM \Rightarrow QS = QM = \frac{SM}{2}. \text{ Deci } QD = QM = QS = \frac{SM}{2}.$$

Din  $HS \equiv SA$ ,  $HM \equiv MA' \Rightarrow SM$  este linie mijlocie în  $\triangle AHA' \Rightarrow SM = \frac{AA'}{2} = \frac{2R}{2} = R$   
 $= R \Rightarrow SM = R$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris  $\triangle ABC$ .

$$\text{Deci } QD = QM = QS = \frac{R}{2}.$$

Analog,  $QN = QE = QT = \frac{R}{2}$  și  $QP = QF = QR = \frac{R}{2}$ . Deci  $QD = QE = QF = QM = QN = QP = QS = QT = QR = \frac{R}{2}$ , unde  $D, E$  și  $F$  sunt picioarele înălțimilor,  $M, N$  și  $P$

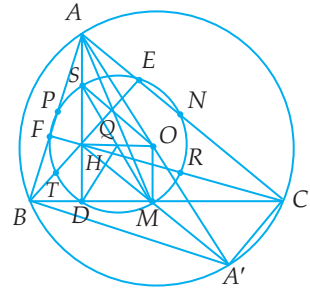


Fig. 1

sunt mijloacele laturilor și  $S$ ,  $T$  și  $R$  sunt mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului, iar  $Q$  este mijlocul segmentului  $OH$ . Deci  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $S$ ,  $T$  și  $R$  sunt situate pe un cerc cu centrul în  $Q$  și raza egală cu jumătate din raza cercului circumscris triunghiului, numit cercul lui Euler.

Centrul cercului lui Euler este mijlocul segmentului  $OH$ .

Raza cercului lui Euler este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului.

### Dreapta lui Euler

Într-un triunghi ortocentru, centrul cercului lui Euler, centrul de greutate și centrul cercului circumscris sunt patru puncte coliniare. Dreapta care conține aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.

*Soluție:*

Deoarece centrul cercului lui Euler este mijlocul segmentului  $OH$ , rezultă că ortocentru, centrul cercului Euler și centrul cercului circumscris sunt coliniare.

Notăm  $AM \cap OH = \{G\}$  (figura 1).

$$\text{Din } OM \parallel AH \Rightarrow \triangle OGM \sim \triangle HGA \Rightarrow \frac{OM}{HA} = \frac{OG}{HG} = \frac{GM}{GA}.$$

$$\text{Din } OM = \frac{AH}{2} \Rightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Din } \frac{OM}{HA} = \frac{GM}{GA} \Rightarrow \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{GA}{GA+GM} = \frac{2}{2+1} \Rightarrow \frac{GA}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Din  $AM$  – mediană,  $G \in AM$  și  $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow G$  este centrul de greutate al triunghiului.

Din  $AM \cap OH = \{G\} \Rightarrow G \in OH$ .

Din  $Q \in OH$ ,  $G \in OH \Rightarrow H, Q, G$  și  $O$  sunt coliniare.